10. 함수의 연속

1) 연속의 의미
2) 닫힌구간과 열린구간
3) 닫힌구간 [a, b]에서 연속
4) 연속함수의 성질
5) $\lim_{n \to \infty} x^n$ 꼴을 포함한 함수의 연속, 불연속
6) 최대 • 최소의 정리(Weierstrass의 정리)
7) 중간값의 정리(intermediate value theorem)

1) 연속의 의미

(1) 함수의 연속(continuous)

함수 $y=f(x)$ 가

① $x=a$ 에서 정의되어 있고(즉 **함숫값 $f(a)$ 가 존재하고**)

② $\lim_{x \to a} f(x)$ 가 존재하며(즉 **극한값이 존재하며**)

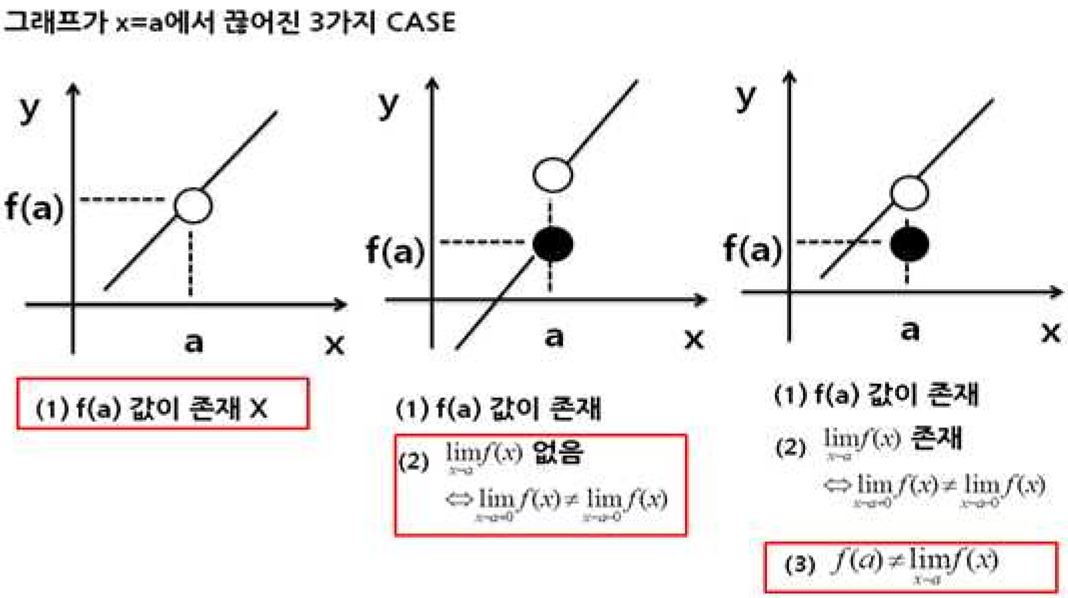
③ $f(a)=\lim_{x \to a} f(x)$ 일 때(즉 **함숫값=극한값일 때**)

이 함수는 $x=a$ 에서 연속이라 한다.

- **"함숫값=극한값"** 즉, $f(a)=\lim_{x \to a} f(x)=\alpha$ (α는 상수)**일 때**,

  $y=f(x)$ 는 $x=a$ 에서 **연속**이다.

(2) 불연속인 경우



① 함숫값이 존재하지 않는 경우

② 극한값이 존재하지 않는 경우

③ 함숫값과 극한값이 서로 다른 경우

2) 구간

구간

두 실수 $a, b\ (a<b)$에 대하여 다음 실수의 집합

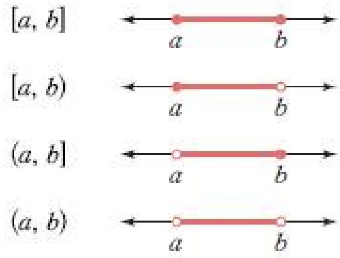
$\{x|a \le x \le b\}$, $\{x|a \le x < b\}$

$\{x|a < x \le b\}$, $\{x|a < x < b\}$

를 각각 구간이라 하고, 이것을 각각 기호로

$[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)

와 같이 나타낸다.



이때 $[a, b]$를 닫힌 구간, (a, b)를 열린 구간, $[a, b)$와 $(a, b]$를 반닫힌 구간 또는 반열린 구간이라 한다.

참고 $\{x|x \le a\}$, $\{x|x < a\}$, $\{x|x \ge a\}$, $\{x|x > a\}$도 모두 구간이며, 기호로 각각 $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $[a, \infty)$, (a, ∞)와 같이 나타낸다. 특히 실수 전체의 집합은 $(-\infty, \infty)$와 같이 나타낸다.

3) 닫힌구간 [a, b]에서 연속

연속함수

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 **연속함수**라고 한다.

참고 함수 $f(x)$가 다음을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

❶ 함수 $f(x)$는 열린 구간 (a, b)에서 연속이다.

❷ $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

4) 연속함수의 성질

연속함수

함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속 또는 그 구간에서 **연속함수**라고 한다.

참고 함수 $f(x)$가 다음을 모두 만족시킬 때, $f(x)$는 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이라고 한다.

❶ 함수 $f(x)$는 열린 구간 (a, b)에서 연속이다.

❷ $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b-} f(x) = f(b)$

5) 연속함수의 성질

함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면 다음 함수도 $x=a$ 에서 연속이다.

① $f(x) \pm g(x)$

② $cf(x)$ (단, c 는 상수)

③ $f(x)g(x)$

④ $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (단, $g(a) \neq 0$)

⑤ $f(x)$ 가 연속함수 $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = f(\lim\limits_{x \to a} x)$

⑥ 연속함수 f, g 에 대하여 $f \circ g$ 가 정의되면, $f \circ g$ 도 연속함수이다.

- 연속함수(continuous function) : 정의역의 모든 점에서 연속인 함수
- 연속인 함수들끼리는 사칙연산을 하여도 항상 연속이다.(단, 0 으로 나누는 것은 제외)
- $\lim$ 가 함수 안으로 항상 자유롭게 들어갈 수 있는 것은 아니다.

  $\Rightarrow$ 함수 $f(x)$가 $x=a$ 에서 연속일 때 $\lim\limits_{x \to a}$ 를 함수 $f(x)$ 안으로 넣어서 계산할 수 있다.

참고사항

기본 함수의 연속성

① 다항함수 : x^n 꼴 $\Rightarrow$ $(-\infty, \infty)$ 에서 연속

② 분수함수 : $\dfrac{f(x)}{g(x)}$($f(x)$, $g(x)$ 는 다항함수)꼴 $\Rightarrow$ $g(x) \neq 0$ 에서 연속

③ 무리함수 : $\sqrt{f(x)}$ ($f(x)$ 는 다항함수)꼴 $\Rightarrow$ $f(x) \geq 0$ 에서 연속

6) $\lim_{n\to\infty} x^n$ 꼴을 포함한 함수의 연속, 불연속

구간을 네 개의 구간으로 나누어 생각한다. ⇒ $|x|<1$, $|x|>1$, $x=1$, $x=-1$

- $|x|<1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, $|x|>1$ 일 때 $\lim_{n\to\infty} x^n = \infty$ 또는 $-\infty$

x^n을 포함한 함수의 연속

함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n-1}+ax+b}{x^{2n}+1}$ 가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하여라. (단, n은 자연수)

x^n은 $n\to\infty$일 때 x의 값의 범위에 따라 그 극한값이 달라지므로

$|x|<1,\ |x|>1,\ x=1,\ x=-1$

로 경우를 나누어 구하고, $x=1$, $x=-1$에서 함수의 연속성을 조사한다.

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty} x^{2n}=0$이므로 $\qquad f(x)=\frac{0+ax+b}{0+1}=ax+b$

(ii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로 $\qquad f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{a}{x^{2n-1}}+\frac{b}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=\frac{1}{x}$

(iii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n-1}=\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로 $\qquad f(x)=\frac{1+a+b}{1+1}=\frac{a+b+1}{2}$

(iv) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n-1}=-1$, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=1$이므로 $\qquad f(x)=\frac{-1-a+b}{1+1}=\frac{-a+b-1}{2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$, $x=-1$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1) \qquad \lim_{x\to 1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 1-}(ax+b)=\frac{a+b+1}{2}$$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1-} f(x)=f(-1) \qquad \lim_{x\to -1+}(ax+b)=\lim_{x\to -1-}\frac{1}{x}=\frac{-a+b-1}{2}$$

$\therefore -a+b=-1$ …… ㉡

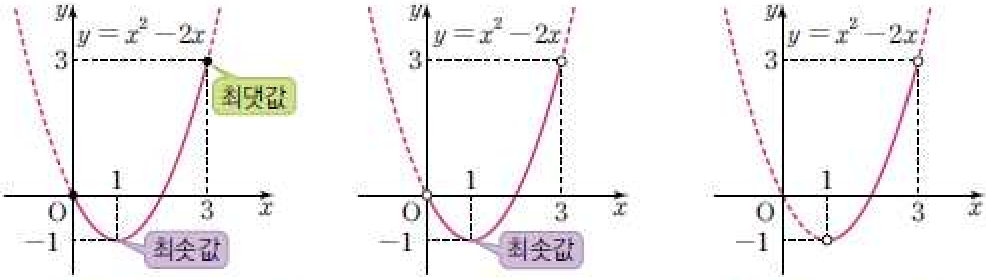
㉠, ㉡에서 $a=1$, $b=0$

$\therefore ab=\mathbf{0}$

6) 최대 • 최소의 정리(Weierstrass의 정리)

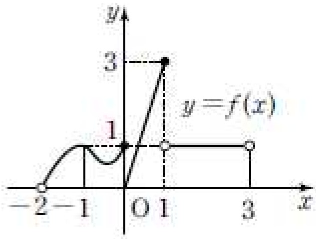
닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속인 함수는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.



일반적으로 닫힌 구간이 아닌 구간에서 정의된 연속함수는 최대·최소 정리가 성립하지 않는다.

구간 $(-2, 3)$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $f(x)$에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?



① 불연속이 되는 x의 값은 2개이다.

② 구간 $[-1, 2]$에서 최솟값을 갖는다.

③ $\lim_{x \to -1} f(x)=1$

④ 극한값 $\lim_{x \to 1} f(x)$는 존재하지 않는다.

⑤ 구간 $(0, 3)$에서 최댓값을 갖는다.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이면 $f(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

탑 ④

① $f(x)-3g(x)=-3x^2-8x-20$이므로 $f(x)-3g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

② $g(f(x))=g(x-5)=(x-5)^2+3(x-5)+5=x^2-7x+15$이므로 $g(f(x))$는 모든 실수 x에서 연속이다.

③ $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x-5}{x^2+3x+5}$에서 $x^2+3x+5=\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}>0$이므로 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

④ $\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{x^2+3x+5}{x-5}$는 $x=5$에서 정의되지 않으므로 $x=5$에서 불연속이다.

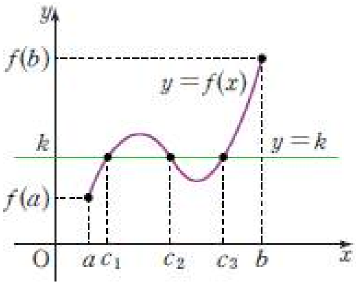
⑤ $f(x)g(x)=(x-5)(x^2+3x+5)=x^3-2x^2-10x-25$이므로 $f(x)g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

7) 중간값의 정리(intermediate value theorem)

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여

$$f(c)=k$$

를 만족시키는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.



참고 사이값 정리는 함수 $f(x)$가 연속함수일 때, 방정식 $f(x)=0$의 실근의 존재를 확인하는 데 이용할 수 있다.
사이값 정리에 의하여 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)$와 $f(b)$의 부호가 서로 다르면, 0은 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 값이므로 a와 b 사이에 $f(c)=0$인 c가 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린 구간 $(a,\ b)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

방정식 $2x^3-x^2-x-1=0$이 오직 하나의 실근을 가질 때, 다음 중 이 방정식의 실근이 존재하는 구간은?

① $(-1,\ 0)$ ② $(0,\ 1)$ ③ $(1,\ 2)$ ④ $(2,\ 3)$ ⑤ $(3,\ 4)$

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(a)f(b)<0$이면 열린 구간 $(a,\ b)$에서 방정식 $f(x)=0$의 실근이 적어도 하나 존재한다.

답 ③

$f(x)=2x^3-x^2-x-1$로 놓으면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-1)=-3<0,\ \ f(0)=-1<0,\ \ f(1)=-1<0,\ \ f(2)=9>0,\ \ f(3)=41>0,\ \ f(4)=107>0$

따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사이값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 $(1,\ 2)$이다.

함수 $y=f(x)$ 가 닫힌구간 $[a,\ b]$ 에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$ 일 때, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이에 있는
임의의 값 k 에 대하여 $f(c)=k$ 를 만족하는 c 가 열린구간 $(a,\ b)$ 에서 적어도 하나 존재한다.

- **중간값의 정리의 변형 :** 함수 $y=f(x)$ 가 **닫힌구간** $[a,\ b]$ **에서 연속**이고 $f(a)f(b)<0$ 이면
  방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(a,\ b)$ 에서 **적어도 한 개의 실근을 갖는다.**

① 중간값의 정리 ② 중간값의 정리의 변형